

STRESS STATE IN A BENT PLANE WITH TWO DIFFERENT CIRCULAR HOLES (THE AXES OF CENTERS IS NORMAL TO THE NEUTRAL AXIS OF THE PLANE)

Stelian Alaci

Emanuel N. Diaconescu

Universitatea "Ștefan cel Mare" Suceava

Keywords: elastic plane, bending, circular holes, bipolar co-ordinates, stress state, photoelasticity

Abstract: The paper deal with stress state in an elastic plane with two different circular holes. At infinity, the plane is subjected to pure bending. The axes of centres is normal to the neutral axis of the plane. To impose the boundary conditions, bipolar co-ordinate are used. The photoelastic method is employed for the validation of the theoretical results. Stress concentration factor is estimated, too.

1. Introducere.

Lucrarea are ca scop determinarea stării de tensiuni dintr-un plan elastic supus la încovoiere. Pe axa neutră a planului se găsesc două orificii circulare diferite cum se prezintă în Figura 1.

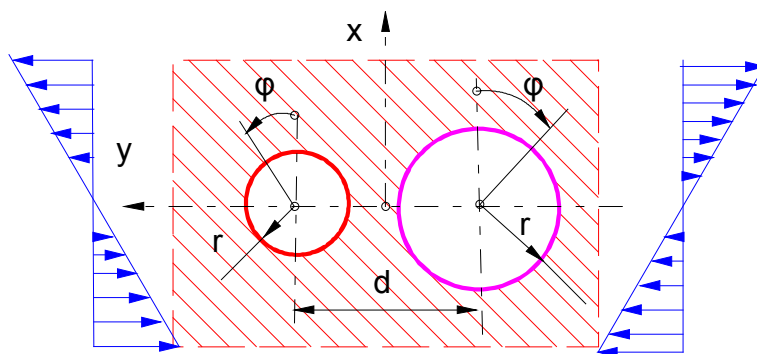


Figura 1 Plan cu două găuri circulare, supus la încovoiere

Pentru rezolvarea problemei se utilizează coordonatele bipolare α și β . coordonate care permit o exprimare comodă a condițiilor la limită. Legătura dintre coordonatele carteziene și cel bipolare este dată [1], de relațiile:

$$\begin{aligned} x &= a \frac{\sin(\beta)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)}, \\ y &= a \frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \end{aligned} \quad (1)$$

în care a este o constantă cu dimensiuni de lungime. Dacă se notează cu d distanța dintre centrele găurilor și cu r raza acestora ecuațiile conturilor celor două găuri, în coordonate bipolare sunt:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \operatorname{acosh} \frac{d}{2r_1}, \\ \alpha_2 &= -\operatorname{acosh} \frac{d}{2r_2}.\end{aligned}\quad (2)$$

2. CONSTRUCȚIA POTENȚIALULUI ELASTIC

Pentru obținerea stării de tensiuni, funcția lui Airy caracteristică încărcării planului compact este trecută în coordonate bipolare α, β . În coordonate carteziene, funcția de potențial caracteristică încovoierii la infinit a planului elastic este:

$$U(x, y) = \frac{I}{6} m x^3. \quad (3)$$

în care m este o constantă cu dimensiunea N/m. Trecând în coordonate bipolare Expresia potențialului $U(x, y)$ și împărțindu-l, conform, [1], prin cantitatea:

$$J = \frac{a}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)},$$

se obține funcția lui Airy în coordonate bipolare, pentru planul compact supus la încovoiere,

$$U(\alpha, \beta) = \frac{1}{6} m a^2 \frac{\sinh(\alpha)}{[\cosh(\alpha) - \cos(\beta)]^2} \quad (4)$$

Acestui potențial i se adaugă potențialul auxiliar $\Phi(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha, \beta) &= \{B_0 \alpha + K \ln[\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)]\}[\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)] + \\ &+ [A_1 \operatorname{ch}(2\alpha) + B_1 + C_1 \operatorname{sh}(2\alpha)] \cos(\beta) + [A'_1 \operatorname{ch}(2\alpha) + C'_1 \operatorname{sh}(2\alpha)] \sin(\beta) \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ [A_k \operatorname{ch}[(k+1)\alpha] + B_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha] + C_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha] + D_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha]] \cos(k\beta) + \right. \\ &\left. + [A'_k \operatorname{ch}[(k+1)\alpha] + B'_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha] + C'_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha] + D'_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha]] \sin(k\beta) \right\},\end{aligned}\quad (5)$$

a cărei formă este precizată de către Jeffery, și se obține potențialul total $V(\alpha, \beta)$.

$$\begin{aligned}V(\alpha, \beta) &= \frac{1}{6} m a^2 \frac{\sinh(\alpha)}{[\cosh(\alpha) - \cos(\beta)]} + \\ &+ \{B_0 \alpha + K \ln[\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)]\}[\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)] + \\ &+ [A_1 \operatorname{ch}(2\alpha) + B_1 + C_1 \operatorname{sh}(2\alpha)] \cos(\beta) + [A'_1 \operatorname{ch}(2\alpha) + C'_1 \operatorname{sh}(2\alpha)] \sin(\beta) \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ [A_k \operatorname{ch}[(k+1)\alpha] + B_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha] + C_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha] + D_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha]] \cos(k\beta) + \right. \\ &\left. + [A'_k \operatorname{ch}[(k+1)\alpha] + B'_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha] + C'_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha] + D'_k \operatorname{ch}[(k-1)\alpha]] \sin(k\beta) \right\},\end{aligned}\quad (6)$$

3.CONDIȚIILE LA LIMITĂ

Determinarea coeficienților necunoscuți $K, B_0, A_1, C_1, A'_1, C'_1, A_k, B_k, C_k, D_k, A'_k, B'_k, C'_k$ și $D'_k, k \geq 2$, se realizează prin impunerea condițiilor la limită:

- pe conturul găurii $\alpha = \alpha_1$:

$$\sigma_\alpha(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0; \quad (6.a)$$

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0; \quad (6.b)$$

- pe conturul găurii $\alpha = \alpha_1$:

$$\sigma_\alpha(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=-\alpha_2} = 0; \quad (7.a)$$

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=-\alpha_2} = 0. \quad (7.b)$$

În plus, trebuie asigurată regularitatea tensiunilor la infinit, lucru prin care se impune ca tensiunile la infinit să fie nule. Analiza expresia potențialului $V(\alpha, \beta)$ arată că numai potențialul auxiliar poate genera tensiuni nenule la infinit. Impunând condiția de anulare, la infinit, pentru potențialului auxiliar,

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} [\Phi(\alpha, \beta)] = 0, \quad (8)$$

se asigură regularitatea tensiunilor la infinit. Pentru dezvoltarea în serie Fourier a potențialului $U(\alpha, \beta)$ se ține cont de relația, :

$$\frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\alpha} \cos(k\beta), & \alpha > 0, \\ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{k\alpha} \cos(k\beta), & \alpha < 0, \end{cases} \quad (9)$$

După cum se poate observa din ecuația (9) dezvoltarea expresiei din membrul drept al ecuației (9) are formă diferită de o parte și alta a axei Ox a crei ecuație în coordonate bipolare este:

$$\alpha = 0. \quad (10)$$

Pentru a putea impune condițiile la limită este necesară dezvoltarea în serie Fourier și a expresiei:

$$\ln[\cosh(\alpha) - \cos(\beta)][\cosh(\alpha) - \cos(\beta)], \quad (11)$$

din potențialul $\Phi(\alpha, \beta)$, cu relația dedusă de autori, [3]:

$$\begin{aligned} & \ln[\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)][\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)] = \\ & = \left\{ 1 + \frac{1}{2}e^{-2\alpha} + \ln \left[\frac{\operatorname{ch}(\alpha) + 1}{(1 + e^{-\alpha})^2} \right] \right\} \cos(\beta) + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{e^{-(k-1)\alpha}}{(k-1)k} - \frac{e^{-(k+1)\alpha}}{k(k+1)} \right] \cos(k\beta). \end{aligned} \quad (12)$$

Jeferey, demonstrează că atunci când contururile găurilor sunt neîncărcate condițiile la limită pot fi impuse, nu tensiunilor ci, direct potențialului $V(\alpha, \beta)$. În acest scop este suficient ca potențialul să se verifice relațiile:

$$V(\alpha, \beta)|_{\alpha=\alpha_1} = \rho_1 \operatorname{th}(\alpha) + \sigma_1 [\operatorname{ch}(\alpha) \cos(\beta) - 1] + \tau_1 \sin(\beta); \quad (13.a)$$

$$\left. \frac{\partial V(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} = \rho_1, \quad (13.b)$$

pe conturul găurii $\alpha = \alpha_1$ și, respectiv:

$$V(\alpha, \beta)|_{\alpha=-\alpha_2} = \rho_2 \operatorname{th}(\alpha) + \sigma_2 [\operatorname{ch}(\alpha) \cos(\beta) - 1] + \tau_1 \sin(\beta); \quad (14.a)$$

$$\left. \frac{\partial V(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=-\alpha_2} = \rho_2, \quad (14.b)$$

pe conturul găurii $\alpha = -\alpha_2$. Constantele $\rho_{1,2}, \sigma_{1,2}$ și $\tau_{1,2}$ poartă denumirea de constantele lui Mitchell. După dezvoltarea în serie a potențialului $U(\alpha, \beta)$ și impunerea condițiilor la limită se obțin tensiunile în coordonate bipolare σ_α , σ_β și $\tau_{\alpha\beta}$ cu relațiile:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\alpha, \beta) &= \frac{1}{a} \left\{ [\cosh(\alpha) - \cos(\beta)] \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \sinh(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin(\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} + \cosh(\alpha) \right\} V(\alpha, \beta); \\ \sigma_\beta(\alpha, \beta) &= \frac{1}{a} \left\{ [\cosh(\alpha) - \cos(\beta)] \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \sinh(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin(\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos(\beta) \right\} V(\alpha, \beta); \\ \tau_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{a} [\cosh(\alpha) - \cos(\beta)] \frac{\partial^2 V(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned} \quad (15)$$

4. VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ

Verificarea rezultatelor teoretice se realizează cu ajutorul fotoelasticității. Proba este confecționată dintr-un material fotoelastic cu grosimea de 1/8 inch, livrat de firma Vishay. Încercările s-au realizat pe un polariscop 500 Series din dotarea Laboratorului de Mecanica Contactului din Facultatea de Mecanică din Suceava. Standul pentru încărcarea probei este proiectat și realizat de autori. Dimensiunile epruvetei fotoelastice sunt de 130mmx20mm. Găurile au razele $r_1 = 1.5\text{mm}$, $r_2 = 3\text{mm}$ și distanța dintre

axed = 3.2mm Concret, verificarea rezultatelor teoretice constă în comparația calitativă a câmpurilor teoretice și experimentale de izocromate și izocline. Izocromatele sunt definite, [4], ca locul geometric al punctelor în care tensiunea tangențială principală $\tau_{\max}$ este constantă. Tensiunile principale pot fi obținute cu ajutorul tensiunilor (10), cu relațiile:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha\beta}^2}; \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha\beta}^2}; \\ \tau_{\max} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha\beta}^2}.\end{aligned}\quad (16)$$

Pentru determinarea izoclinelor, definite ca locul geometric al punctelor în care tensiunile principale au aceeași direcție, ecuația (17), este necesară cunoașterea expresiilor tensiunilor carteziene.

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \text{const.} \quad (17)$$

În ecuația (17), θ reprezintă unghiul de rotație al axelor polarizorului față de sistemul de coordonate al polariscopului.

Tensiunile carteziene se determină cu relațiile:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sinh(\alpha)^2 \sin(\beta)^2 \sigma_a + [\cosh(\alpha)\cos(\beta) - 1]^2 \sigma_{\beta} \dots \\ &\quad - \{[\cosh(\alpha)\cos(\beta) - 1]^2 - \sinh(\alpha)^2 \sin(\beta)^2\} \tau_{a\beta}}{[\cosh(\alpha) - \cos(\beta)]^2}, \\ \sigma_y &= \frac{[\cosh(\alpha)\cos(\beta) - 1]^2 \sigma_a + \sinh(\alpha)^2 \sin(\beta)^2 \sigma_{\beta} \dots \\ &\quad + \{[\cosh(\alpha)\cos(\beta) - 1]^2 - \sinh(\alpha)^2 \sin(\beta)^2\} \tau_{a\beta}}{[\cosh(\alpha) - \cos(\beta)]^2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sinh(\alpha)\sin(\beta)[\cosh(\alpha)\cos(\beta) - 1](\sigma_a - \sigma_{\beta}) + [\cosh(\alpha)\cos(\beta) - 1]^2 \sigma_{\beta} \dots \\ &\quad + \{[\cosh(\alpha)\cos(\beta) - 1]^2 - \sinh(\alpha)^2 \sin(\beta)^2\} \tau_{a\beta}}{[\cosh(\alpha) - \cos(\beta)]^2}.\end{aligned}\quad (18)$$

Tensiunile principale sunt caracteristici intrinseci al tensorului tensiune, ele putând fi obținute fie cu ajutorul tensiunilor (16) fie cu ajutorul tensiunilor carteziene (18).

5. COMPARAȚIE ÎNTRE REZULTATELE TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE

În Figura 2 se prezintă comparativ câmpurile de izocromate obținute teoretic și experimental. Figura 3

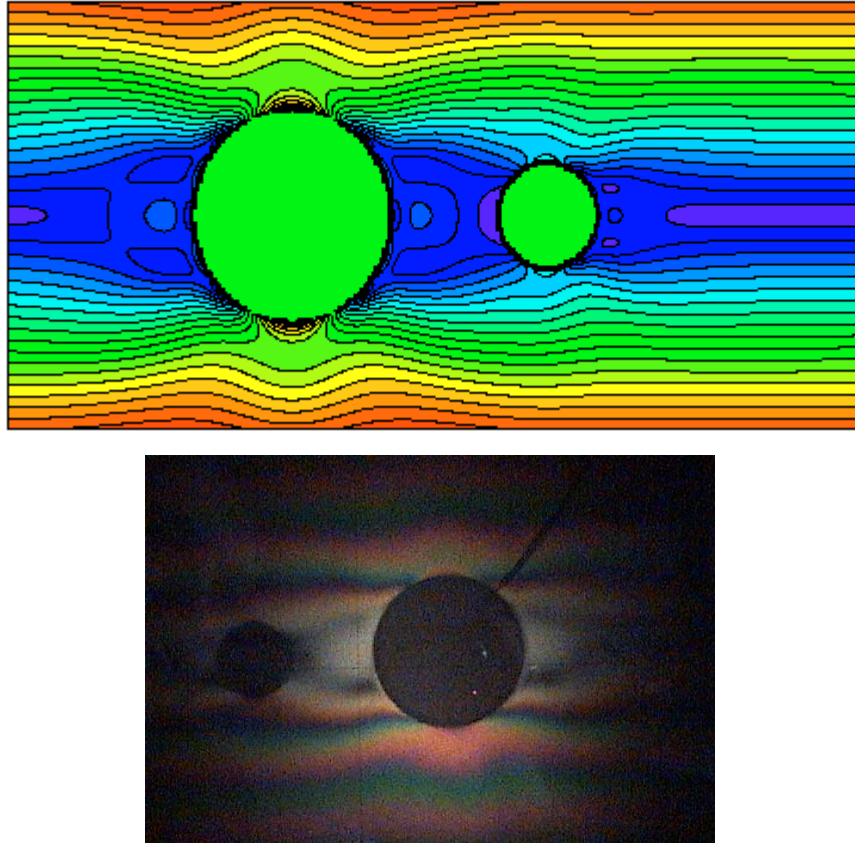


Figura 2. Izocromatele teoretice și experimentale

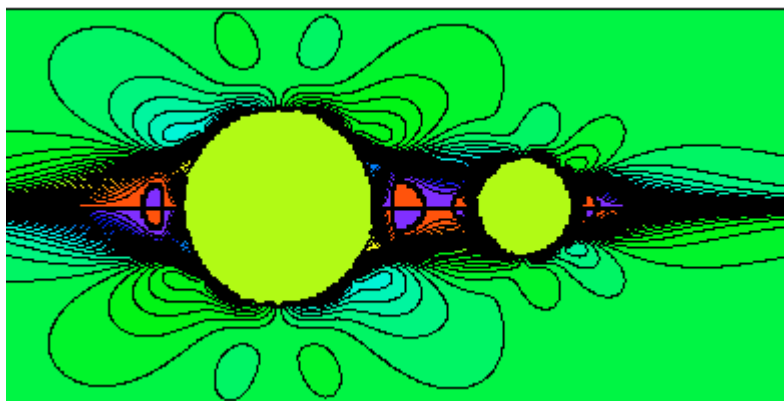


Figura 3 Câmpul teoretic de izocline

Spre deosebire de izocromatele experimentale care se obțin toate pe ecranul polariscopului, dintre toate izoclinele nu poate fi văzută decât una, cea pentru care este polariscopul. Este necesară separarea din câmpul de izocromate a aceleia care corespunde valorii impuse a parametrului θ . Câteva izocline teoretice sunt prezentate în Figura 5.

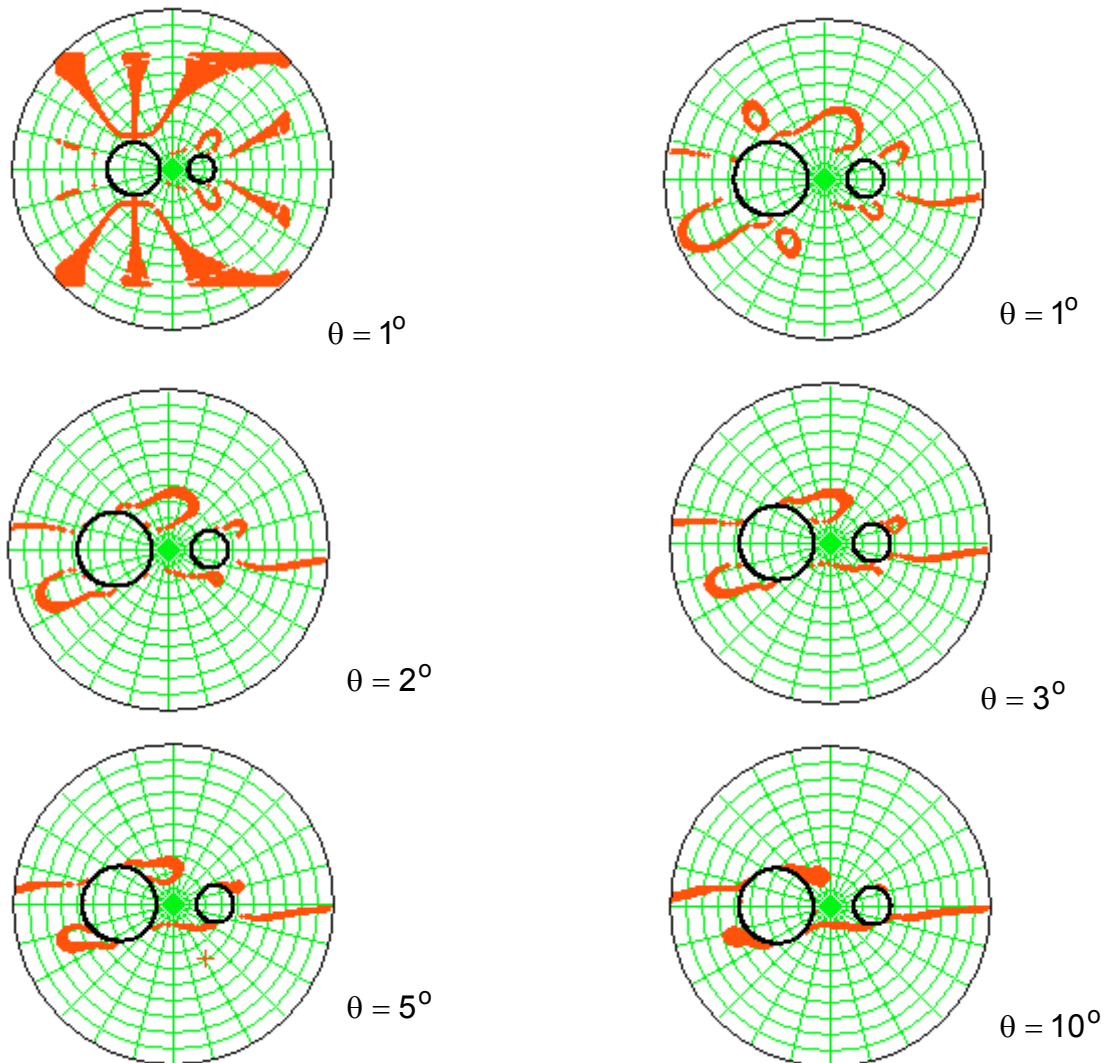


Figura 5. Izocline teoretic de diferiți parametri

Figura 5 arată că izoclinele care pot fi observate sunt cele de parametru $|\theta| \leq 5^\circ$. Peste valoarea de 5° izoclinele nu mai pot fi sesizat.

6. Factorul de concentrare a tensiunilor.

Un aspect de importanță practică este precizarea factorului de concentrare al tensiunilor. Pe conturul găurilor, așa cum arată ecuațiile (16), coroborate cu condițiile la limită, singura tensiune nenulă este tensiunea σ_β care este și tensiune circumferențială. În Figura 6 se prezintă variația tensiunii circumferențiale pe conturul găurii pentru două situații:

- găurile sunt situate la distanță comparabilă cu raza lor, $d = 20\text{mm}$, $d = 8\text{mm}$, σ'_{β_1} , σ'_{β_2} ;
 - cazul când distanță dintre centrele găurilor este mult mai mare decât raza acestora σ''_{β_1} , σ''_{β_2} ;.
- După observă din Figura 6, tensiunea pe conturul găurii mari nu depinde practic, de distanță dintre găuri. Totodată pe acest contur se atinge tensiunea maximă. Din

acest motiv pentru calcule de rezistență se poate considera numai gaura de diametru maxim.

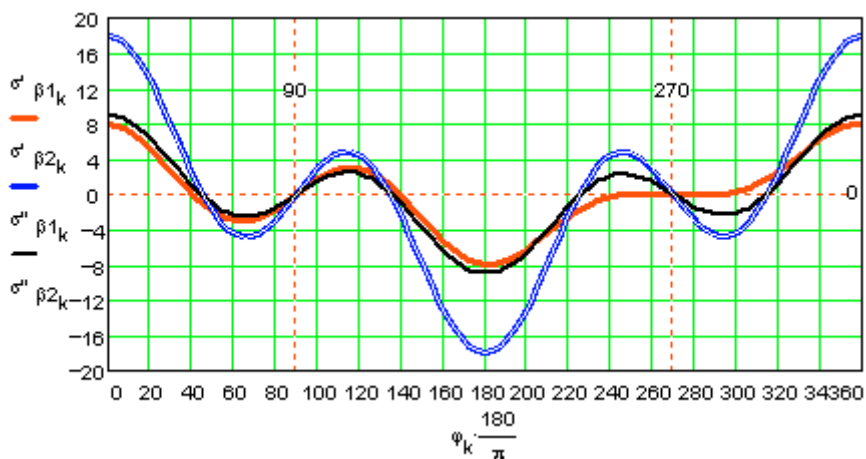


Figura 3 Variația tensiunii circumferențiale pe conturul găurilor

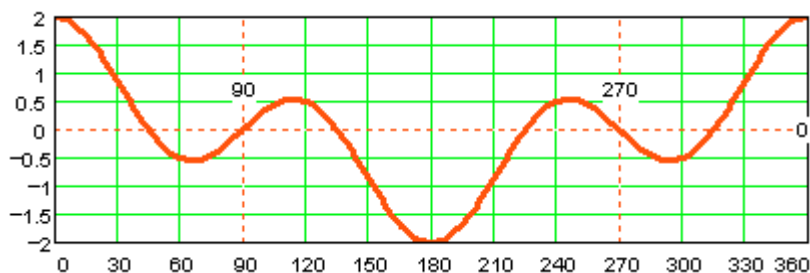


Figura 3 Variația tensiunii circumferențiale adimensionale pe conturul găurilor (găuri depărate)

7. CONCLUZII:

- efectul de concentrator al găurilor este scăzut deoarece acestea sunt situate într-o zonă slab încărcată (axa neutră a planului);
- valoarea maximă a tensiunii se atinge pe gaura mare, la capetele diametrului perpendicular pe axa centrelor;
- coeficientul de concentrare al tensiunilor are valoarea 2, fiind definit ca raportul dintre tensiunea maximă pe conturul găurilor și tensiunea din planul compact, de pe o dreaptă paralelă cu axa centrelor, situată la o distanță egală cu raza maximă,;

BIBLIOGRAFIE:

1. Lebedev, N. N., *Funcții speciale și aplicațiile lor*, Editura Tehnică, 1957
2. Jeffery, G. B., *Plane Stress and Plane Strain in Bipolar Coordinates*, Philos. Trans. Of the Royal Society, London, A221, 1921, p265-293
3. Alaci S., *Efectul discontinuităților interne de tip gol asupra stării de tensiuni la contactul elastic plan*, Teză de doctorat, Suceava, 2002
4. Iosipescu, N., *Introducere în fotoelasticitate* Vol. I, II., Ed. Tehn. 1958, 1960